2.3 - Il coefficiente binomiale

I numeri $C_{n,k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ vengono anche detti (per un motivo che chiariremo) “coefficienti binomiali”,

e si suole indicarli col simbolo specifico $\dbinom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ che si legge “**coefficiente binomiale n su k**” .

Si ha dunque $\boxed{\dbinom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}=\dfrac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k!(n-k)!}}}$ **o anche** $\boxed{\dbinom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}=\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}}=\dfrac{\mathbf{n(n-1)...(n-k+1)}}{\mathbf{k!}}}$

e il fatto che sia $\boxed{\dbinom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}=\mathbf{C_{n,k}}}$ porta alla seguente utilissima idea-guida:

IDEA-GUIDA SUL COEFFICIENTE BINOMIALE

Il coefficiente binomiale $\dbinom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ risponde alla domanda :

"dati n oggetti, in quanti modi ne posso scegliere k?"

Ricordiamo che stiamo sempre supponendo $k \le n$. In particolare, si ha $\dbinom{n}{1}=n \quad \dbinom{n}{n-1}=n$

Ricordando, poi, la convenzione $\boxed{0!=1}$, possiamo scrivere anche $\dbinom{n}{0}=1 \quad \dbinom{n}{n}=1$

E’, ovviamente, opportuno *semplificare* le frazioni con fattoriali prima di svolgere il calcolo …

Esempi: $\dfrac{10!}{7!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=720;\qquad \dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=\dfrac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}=20$

- Esempio 4 - Ho un insieme di 7 oggetti distinti. In quanti modi posso sceglierne: a) 3? b) 2? c) 1? d) 6?
  Risposte:
  a) $\dbinom{7}{3}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=35$ b) $\dbinom{7}{2}=\dfrac{7\cdot 6}{2!}=21$ c) $\dbinom{7}{1}=7$ (ovvio ...) d) $\dbinom{7}{6}=7$ (ovvio : sceglierne 6 è come escluderne 1 ...)

La PROPRIETÀ più notevole dei coefficienti binomiali è la seguente: $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n}{n-k}$

L’identità in questione è facile da dimostrare col calcolo (provaci!), e comunque si può subito ragionare così:
$\dbinom{n}{k}$ *è il numero di modi con cui è possibile, dati n oggetti, sceglierne k; ma sceglierne k equivale a sceglire quegli $n-k$ che si vogliono escludere; e tale ultima scelta si può effettuare in $\dbinom{n}{n-k}$ modi.*

2.4 - Permutazioni

Le "**PERMUTAZIONI DI n OGGETTI**"
sono tutte le n-uple ordinate costruibili utilizzando, senza ripetizione, quegli oggetti;
il numero delle permutazioni di n oggetti si indica col simbolo P_n e dal Secondo Principio si ha subito:

$$\boxed{\mathbf{P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!}}$$

E’ evidente che $\boxed{\mathbf{P_n=D_{n,n}}}$:
il numero delle permutazioni di n oggetti coincide col n° delle disposizioni di quegli oggetti, presi a n a n.

IDEA-GUIDA Permutazioni: modi in cui è possibile permutare l'ordine di n oggetti
(modi in cui è possibile ordinarli, metterli in fila, metterli in colonna)

- Esempio 5 - In quanti modi possono 5 persone mettersi in coda davanti ad uno sportello? *R.*: $P_5=5!=120$